

Warszawa, 17 lutego 2025

RECENZJA ROZPRAWY HABILITACYJNEJ GRZEGORZA OLESIKA

MACIEJ BORODZIK

Przedłożona rozprawa habilitacyjna spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom habilitacyjnym. Wnoszę o dopuszczenie jej do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.

UZASADNIENIE

Przedstawienie dziedziny. Niech $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ będzie odwzorowaniem wielomianowym. Zazwyczaj zakłada się, że $0 \in \mathbb{C}$ jest wartością krytyczną. Punkt $0 \in \mathbb{C}^n$ zwyczajowo jest traktowany jako osobliwy, przy czym nie musi to być osobliwość izolowana. Z wielomianem f zadającym to odwzorowanie (w teorii osobliwości zespolonych zazwyczaj nie odróżnia się wielomianu od odwzorowania wielomianowego) można stowarzyszyć pewien wielościan wypukły Δ w f w $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ o wierzchołkach całkowitych. Dla ustalonego wielościanu wypukłego Δ można rozważać $\mathcal{F}_\Delta$, rodzinę wszystkich wielomianów, których wielościanem stowarzyszonym jest Δ . W rodzinie $\mathcal{F}_\Delta$ wyróżnia się klasę wielomianów *niezdegenerowanych*, spełniających dość techniczny, ale intuicyjny warunek niezdegenerowania.

W dziedzinie kluczowe pytanie brzmi: które własności osobliwości wielomianu niezdegenerowanego dają się kombinatorycznie odczytać z wielościanu Δ .

Jest to bardzo rozsądne pytanie, zadane ponad 40 lat temu przez Arnolda i w dalszym ciągu jest przedmiotem badań. Podobne pytania można stawiać dla wielomianów w nieskończoności, badając osobliwości w nieskończoności. Pojęcie (nie)zdegenerowania wielomianu w nieskończoności jest subtelne i badane przez wielu matematyków takich jak Jelonek, Neumann, Némethi, Rudolph.

Omówienie prac kandydata. Głównym obszarem zainteresowań dr. Oleksika jest tzw. wykładnik Łojasiewicza osobliwości: jest to najlepszy wykładnik α dla którego $\|\nabla f(z)\| \geq C\|z\|^\alpha$ dla z w pewnym otoczeniu punktu osobliwego i dla pewnej stałej C . Oleksik [BKO21, Theorem 6.1] pokazuje sposób na obliczenie tego wykładnika dla niezdegenerowanych osobliwości powierzchni (przypadek $n = 3$). Wynik uogólnia prace Lenarcika dla krzywych (przypadek $n = 2$). Główną nietrywialną metodą jest nierówność Kuznirenki–Bernsteina, obliczająca liczbę zer układu równań, oraz wynik Brzozowskiego mówiący (niekonstruktywnie) o tym, że wykładnik Łojasiewicza osobliwości niezdegenerowanej jest wyznaczony przez diagram Newtona. Sam wynik jest dość nietrywialny.

Kontynuując badania, Oleksik pokazuje w [BKO23, Theorem 2], stałość wykładnika Łojasiewicza przy pewnej klasie deformacji. Głównymi metodami jest nierówność Płoskiego oraz (dość trywialne) rozwiązanie problemu μ -const dla osobliwości powierzchni krotności 2. Wynik jednak całkowicie trywialny nie jest. W tym przypadku trudno mi znaleźć jego zastosowanie. Problem badania deformacji osobliwości powierzchni jest niezwykle istotny, ale ta praca do niego nie zbliża.

W pracy [Ole20], Oleksik interesuje się problemem wymiaru zbioru punktów osobliwych dla osobliwości spełniających pewien dodatkowy warunek na nośnik (a więc kombinatoryczny). Otóż pokazuje w jaki sposób obliczyć wymiar tego zbioru, jeśli $n \leq 3$. Ogranicza to właściwe przypadek do badania osobliwości powierzchni, ale ten przypadek jest nietrywialny. Głównym miejscem w dowodzie [Ole20] gdzie jest wykorzystywane założenie $n \leq 3$ jest dowód Twierdzenia 3.2 na stronie 6. Ten warunek pojawia się niemal znikąd, bo większość teorii jest rozwinięta dla dowolnego n i rzeczywiście, autor w Autoreferacie obiecuje rozwiązanie ogólnego przypadku.

Zdecydowanie najsilniejszą pracą w dorobku kandydata jest praca [EOR21], opublikowana w dość przyzwoitym czasopiśmie Adv. Math., w której autorzy pokazują analog twierdzenia Kuznirenki dla liczby Milnora na tzw. liczby Le osobliwości nieizolowanych. Główne metody są kombinatoryczne i polegające znowu na zastosowaniu formuły Kuznirenki, dowód zresztą jest stosunkowo prosty, niemniej wynik jest ważny sam w sobie.

Praca [Ole22] jest kolejną próbą uzyskania wyniku wokół hipotezy Jakobianowej.

Ocena merytoryczna. Większość wczesnych prac kandydata krąży wokół takiego czy innego sposobu atakowania hipotezy Jakobianowej. Nie jest to właściwa strategia budowania kariery. Jak widać w autoreferacie po pracach kandydata, czy po „przełomowych” pracach, które cytuje, artykuły na ten temat publikuje się w co najwyżej bardzo przeciętnych czasopismach, uzyskując niewielkie zainteresowanie wśród naukowców poza własnym bardzo wąskim gronem. W opinii recenzenta, zajmowanie się hipotezą Jakobianową bez wprowadzania całkowicie nowych metod, zupełnie mija się z celem.

Dlatego z bardzo dużym zadowoleniem odnotowuję prace na inny temat, zwłaszcza [EOR21], która z jakobianem ma niewiele wspólnego. Pracę napisaną ze współautorami spoza własnego środowiska, tak naprawdę z zagranicznymi (Eyrat). Dowodzi ona, że Oleksik jest naukowcem o dużym potencjale, który zaczyna się powoli wyrwać z własnego lokalnego środowiska.

Do oceny habilitanta należy podać wpływ na dziedzinę. Otóż osobliwości powierzchni to jest bardzo duży dział matematyki, a osobliwości powierzchni w $\mathbb{C}^3$ to istotny dział tej nauki. Wpływ prac Oleksika na dziedzinę, poza [EOR21], można ocenić jako co najwyżej „umiarkowanie istotny”. Habilitant de facto stosuje jedną technikę (twierdzenie Kuznirenki), nie ucząc się nowych metod, jak choćby tych, które Némethi (jeden z najsłynniejszych ekspertów w tej dziedzinie) opublikował w niedawnej książce. Prace poza [EOR21] zdecydowanie nie wystarczają na zbliżenie się do poziomu wymaganego do habilitacji. Owszem, Feehan w pracy z G&T cytuje 3 prace habilitanta, ale dwie wymienia we wstępie, a o trzeciej pisze na końcu w kategorii „see also”. Poza tym, znakomita większość cytowań to cytowania własnego środowiska.

Natomiast [EOR21] ma szanse stać się istotną pracą w dziedzinie, zwłaszcza że dotyczy bardzo trudnych problemów osobliwości nieizolowanych. Brak cytowań nie jest tutaj bardzo alarmujący, ze względu na trudność dziedziny. Zdecydowanie ma ona istotny wpływ

na rozwój badań nad osobliwościami nieizolowanymi, tym istotniejszy, że wyników w tej dziedzinie jest mało.

Bibliometria. Pewnym zwyczajem w recenzjach rozpraw habilitacyjnych stało się ocenianie habilitanta na podstawie danych bibliometrycznych, na przykład liczby publikacji i liczby cytowań. Oczekiwanie jest takie, że matematyk mający 12–15 publikacji na habilitację zasługuje. Ten zwyczaj uważam za szkodliwy i mylący. Gdyby bowiem ocena bibliometryczna była kluczowa, niepotrzebne byłyby recenzje. Ocenie podlega wpływ na dziedzinę czy poprzez uzyskiwanie ważnych wyników, czy poprzez rozwijanie metod, a nie liczbowe uzyskanie takiego czy innego progu.

Ocena końcowa. Pomimo tego, że jest to dość 'późna' habilitacja, autor pokazuje, że zaczyna się uczyć nowych metod, poszerzać zakres współpracy poza lokalne środowisko. Ostatnie prace wskazują, że ma wysoki potencjał naukowy. Recenzent mocno sugeruje rozwinięcie współpracy z innymi ośrodkami, krakowskim, warszawskim, a także międzynarodowymi, jak np. Budapeszt.

Konkluzja. Wobec powyższego stawiam tezę, że przedstawiony cykl prac stanowi znaczny wkład w rozwój określonej dyscypliny ¹. Dlatego uważam, że przedstawiona rozprawa habilitacyjna spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom habilitacyjnym.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF WARSAW, UL. BANACHA 2, 02-097 WARSAW, POLAND
Email address: mcboro@mimuw.edu.pl

¹por. Dz. U. 478 z 2001, z późn. zm., art 219 ust 1 pkt 2