



LAMA Laboratoire de Mathématiques, UMR 5127 de CNRS

Professor Krzysztof Kurdyka

UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC
Laboratoire de Mathématiques (LAMA) UMR 5127
73-376 Le Bourget-du-Lac cedex FRANCE
tel. 04 79 75 86 61, fax 04 79 75 81 42
e-mail: Krzysztof.Kurdyka@univ-smb.fr

Le Bourget-du-Lac, 7 kwietnia 2025

Opinia o dorobku naukowym dr. Grzegorza Oleksika

Pan dr. G. Oleksik ukończył w roku 2002 studia magisterskie na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego. Następnie doktoryzował się na tymże uniwersytecie w listopadzie 2010. Promotorem jego dysertacji zatytułowanej « Wykładnik Łojasiewicza osobliwości niezdegenerowanych » był profesor Tadeusz Krasiński. Obecnie Pan dr. G. Oleksik zatrudniony jest na stanowisku adiunkta w Instytucie Matematyki Politechniki Poznańskiej.

Jego dorobek naukowy stanowi 14 publikacji recenzowanych w międzynarodowych czasopismach naukowych, 4 w sprawozdaniach z konferencji i wiele prezentacji na warsztatach i konferencjach. W mojej ocenie najważniejsza jest, nie ilość jak i poziom czasopism gdzie opublikował swoje prace, ale jakość i głębokość jego wkładu w dyscyplinę w której pracuje.

Tematyka prac Pana dr. Oleksika to teoria osobliwości, w szczególności badanie niezmienników kielków funkcji holomorficznych. Jest to klasyczna dziedzina, pochodząca właściwie jeszcze od I. Newtona. Od lat 60-tych ubiegłego wieku jest intensywnie rozwijana dzięki wkładowi J. Milnora, R. Thoma, V.I. Arnolda i wielu innych.

Kiełek funkcji holomorficznej n -zmiennych jest zadany przez szereg potęgowy o dodatnim promieniu zbieżności. Kiełek nazywamy osobliwością gdy jego pochodne cząstkowe w punkcie znikają. Z takim szeregiem jest związany zbiór wykładników odpowiadający jednomianom z niezerowym współczynnikami. Dodając do tego zbioru dodatnie kwadranty i biorąc obwiednię wypukłą otrzymujemy *wielościan Newtona* i rodzinę jego zwartych ścian zwaną *diagramem Newtona* szeregu. Biorąc wielomiany odpowiadające ścianom zwartemu diagramowi, Kuznirenko (w latach 70-tych 20-tego wieku) wprowadza pojęcie niezdegenerowanego kielka dla swojego

diagramu. Przy takim założeniu, dla osobliwości izolowanej Kuznirenko podaje wzór (w terminach diagramu) na liczbę Milnora, ważnego topologicznego niezmiennika osobliwości izolowanej.

W powyższym kontekście nierówność Łojasiewicza w przypadku osobliwości izolowanej wyraża się następująco: norma gradientu jest oszacowana od dołu przez k -tą potęgę odległości od punktu początkowego. Najmniejsze takie k nazywane jest *wykładnikiem Łojasiewicza* osobliwości.

Związki między tymi pojęciami (i ich uogólnieniami) są przedmiotem badań dr. Oleksika. W swoim autoreferacie prezentuje on 6 prac w tej tematyce opublikowanych w latach 2016-2023, czyli już po uzyskaniu stopnia doktora. Opiszę trzy spośród tych prac.

W artykule *On combinatorial criteria for non-degenerate singularities* Kodai Math. J. 39 (2016) no.2, 455–468, wspólnym z S. Brzostowskim, autorzy wykazują bardzo istotną obserwację, że w kluczowym wzorze Kuznirenki na liczbę Milnora, można osłabić założenia. Warunek dogodności, tzn. że wielościan Newtona przecina wszystkie hiperpłaszczyzny współrzędnych okazuje się nie być konieczny. W istocie autorzy otrzymują charakteryzację niezdegenerowanych osobliwości przez własności kombinatoryczne nośnika i przez skończoność liczby Newtona.

Praca C. Eyral, G. Oleksik, A. Różycki *Le numbers and Newton diagrams* opublikowana w 2021, w wysoko notowanym czasopiśmie *Advances in Mathematics* zawiera bardzo ciekawe wyniki dotyczące poprzednio wymienionych zagadnień w przypadku osobliwości nieizolowanych. Jeśli zbiór punktów krytycznych nie jest izolowany, tzn. ma wymiar $d > 0$, to liczba Milnora nie jest dobrze określona. W latach 90-tych ubiegłego wieku D. Massey wprowadził ciąg $d+1$ liczb, zwanych liczbami L^e . Ich konstrukcja jest topologiczna, zależna od układu współrzędnych i wymaga dodatkowych założeń. Tym nie mniej dla generycznego układu współrzędnych liczby L^e są dobrze określone. Główny wynik tej pracy to podanie algorytmu, który wylicza liczby L^e na podstawie diagramu Newtona. Jest to bardzo subtelna konstrukcja kombinatoryczna. Jako wniosek otrzymuje się ważny fakt, że jeśli dwie niezdegenerowane osobliwości mają takie same diagramy Newtona to mają takie same liczby L^e (o ile one istnieją), w szczególności ich zbiory punktów krytycznych mają taki sam wymiar.

W pracy *The Łojasiewicz exponent of weighted homogeneous polynomials at infinity* opublikowanej (samodzielnie) w *Kyoto J. Math.* 2022, autor podaje jawną formułę na wykładnik Łojasiewicza w nieskończoności dla wielomianów jednorodnych z wagami, przy założeniu, że zbiór punktów krytycznych jest skończony (w istocie pusty albo jeden punkt) i wagi są niemniejsze niż 2. Następnie podaje proste kryterium na właściwość odwzorowań wielomianowych jednorodnych z wagami, przy założeniu, że wagi są większe niż 1. Ostatecznie dowodzi, że Hipoteza

Jakobianowa jest prawdziwa w tym przypadku. Wyniki te są wysoce nietrywialne jak wskazują liczne przykłady podane przez autora i otwarte problemy w tej tematyce.

Dwie prace, opublikowane ostatnio wspólnie z S. Brzostowskim i T. Kasińskim, dotyczą problemu wyliczenia wykładnika Łojasiewicza dla osobliwości wymiaru 3, jak i zachowania tego wykładnika przy deformacjach. Jest to aktywna dziedzina pełna nietrywialnych wyzwań, w której pracowali tacy matematycy jak B. Teissier, M. Oka, Bivia-Ausina i wielu innych. Jak rozumiem wymiar 3 jest pierwszym otwartym kombinatorycznie przypadkiem.

Pan dr. Oleksik był promotorem licznych prac magisterskich i inżynierskich z matematyki oraz analizy danych. Uczestniczył w wielu konferencjach naukowych, gdzie miałem wielokrotnie okazję wysłuchać jego odczytów. Były one zawsze bardzo merytoryczne i dobrze przygotowane, co dowodzi jego talentów dydaktycznych. Z jego osiągnięć organizacyjnych pragnę podkreślić pracę sekretarza (przez 14 lat) Ogólnopolskiej Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Algebraicznej i Analitycznej, która odbywa się w styczniu w Łodzi. Warto zauważyć działalność popularyzatorską matematyki i kryptografii w liceum w Płocku.

Kandydat otrzymał w 2019 grant NCN Miniatura 2, który wykorzystał na staż w renomowanym centrum naukowym VIASM w Hanoi. W latach 2008 - 2017 był wykonawcą w dwóch grantach NCN. Współpracuje z IMPAN w Warszawie (Z. Jelonek, Ch. Eyral), Politechniką Świętokrzyską (A. Lenarcik, A. Płoski) i uczestniczy aktywnie Ogólnopolskim Seminarium z Teorii Osobliwości. Po przeniesieniu w 2022 do Poznania kontynuuje współpracę z grupą profesora Kasińskiego w Łodzi.

Dorobek naukowy dr. Oleksika oceniam wyżej niż habilitację, które oceniałem (pozytywnie) w ostatnich latach. Dlatego, bez żadnych wątpliwości, stwierdzam że w pełni zasługuje on na stopień doktora habilitowanego nauk matematycznych.

Profesor Krzysztof Kurdyka



